Zbornik gozdarstva in lesarstva, Ljubljana, 23. 1983, s. 149 – 178

Oxf: 561--015,5

Izvleček:

VADNAL, A., KOTAR, M., ZADNIK-STIRN, L., GAŠPERIŠIČ, F.:

UPORABA RASTNIH FUNKCIJ V GOZDARSTVU

Rastne funkcije so nepogrešljiv pripomoček pri sestavi donosnih tablic in postavitvi različnih modelov gospodarjenja. Rastna funkcija mora biti prilagodljiva, to pomeni, da mora kar se da najbolјše ponazarjati dejansko rast sestojev, istočasno pa mora biti v takšni obliki, da vrednosti njenih parametrov neposredno podajajo karakteristične točke rasti sestoja in rastišča. V prispevku je podana tudi nova oblika rastne funkcije, ki dobro izpolnjuje pogoje, ki jih mora imeti tovrstna funkcija.

Abstract:

VADNAL, A., KOTAR, M., ZADNIK-STIRN, L., GAŠPERIŠIČ, F.:

THE USE OF GROWTH FUNCTIONS IN FORESTRY

Growth functions are an indispensable resource for making profitable tablets and setting different models of management. The growth function has to be adaptable which means that it has to present as best as possible the actual growth of stands and at the same time to be in such a form, that the values of its parametres directly present the characteristical points of stand and site growth. The new form of growth function which fulfills well the conditions which a function of this kind has to have, is also presented in the paper.

Prof. dr. ALOJZIJ VADNAL prof. matematika
61000 Ljubljana, Ažbetova 4

Prof. dr. MARJAN KOTAR dipl. ing. gozd.
Biotehniška fakulteta VTOZD za gozdarstvo,
61000 Ljubljana, Večna pot 83, YU

mag. LIDIJA ZADNIK-STIRN prof. matematike
Biotehniška fakulteta, VTOZD za gozdarstvo,
61000 Ljubljana, Večna pot 83, YU

prof. dr. Franc Gašperšič dipl. ing. gozd.
Biotehniška fakulteta VTOZD za gozdarstvo,
61000 Ljubljana, Večna pot 83, YU

KAZALO VSEBINE

Stran:

Izvleček in abstract

1. UVOD 152

2. ANALITIČNA PREDSTAVITEV RASTI 152

3. ANALITIČNE FUNKCIJE RASTI 156

4. DOLOČEVANJE PARAMETROV 167

5. FUNKCIJE SESTOJA 169

6. ZAKLJUČEK 172

7. POVZETEK 175

8. SUMMARY 176

9. LITERATURA 178

1. UVOD

Gospodarjenje z gozdovi temelji na izkoriščanju in ciljnem uravnavanju biološke proizvodnje. Za uspešno uravnavanje organske proizvodnje pa je potrebno poznavanje rastnih procesov oziroma rasti. Ker je z rastjo v ozki povezavi tudi donos iz gozda, je razumljivo, da so rast gozdnih sestojev pričeli proučevati že v samem začetku načrtnega gospodarjenja z gozdovi. Pojem "rast" uporabljamo v bioloških znanostih v dvojnem pomenu:

— rast kot proces
— rast kot vsota kvantitativnih sprememb nekega znaka na drevesu ali v sestoju.

V predloženem sestavku obravnavamo rast kot kvantitativne spremembe določenih znakov v teku življenja drevesa oziroma sestoja.

Namen sestavka je predstavitev problematike proučevanja rasti in njene analitične predstavitve ter seznanitev gozdarske strokovne javnosti z rastno funkcijo, ki je še posebej primerna za podajanje rasti gozdnega drevja in gozdnih sestojev. Predložena funkcija je rezultat dela raziskovalne skupine, ki že več let proučuje možnost optimiranja gozdnega gospodarjenja s pomočjo matematičnih metod. Ta skupina raziskuje možnosti postavitve modela, s katerim bi lahko usmerjali gozdno proizvodnjo tako, da bi bila zagotovljena trajnost in optimalen donos. Pri postavitvi takšnega modela je bilo treba konstruirati funkcijo, ki dobro ponazarja potek rasti posameznih drevesnih vrst na različnih rastiščih in ob različnih gojitvenih ukrepih. Ta funkcija mora izpolnjevati osnovne pogoje rastne funkcije in biti istočasno zelo prilagidljiva; to pomeni, da se dobro približa stvarnim vrednostim.

2. ANALITIČNA PREDSTAVITEV RASTI

Na rast drevesa in sestoja vpliva cela vrsta faktorjev; velik del teh je še danes nemerljiv ali pa težko izmerljiv. Razen te težave pa imamo pri rasti še tako imenovane korelacijske povezave, kar pomeni, da odvisnost med znakom, na katerem merimo spremembe v rasti in znaki, s katerimi merimo vpliv faktorjev, ki vplivajo na rast, velja v globalu, ne pa v posameznem primeru.

Rast drevesa ali sestoja spremljamo z različnimi znaki, ki pa morajo biti merljivi. Te znake imenujemo tudi rezultativni znaki, ker so rezultat dejavnikov, ki vplivajo na rast. Znake dejavnikov, ki vplivajo na rast in so takšne narave, da jih lahko merimo ali kako drugače ovrednotimo, npr. rangiramo, uvrščamo med faktorialne znake. Vse dejavnike, katerih učinka ne moremo meriti ali pa so nedoločljivi, uvrščamo med slučajnostne faktorje, njihove učinke pa med slučajnostne vplive. Rastna funkcija pa je tista funkcija, ki podaja odvisnost med rezultativnimi in faktorialnimi znaki ob predpostavki, da je ta odvisnost funkcijska. Za učinke slučajnostnih faktorjev predpostavljamo, da se pri velikem številu osebkov ali v sestoju uničijo. Iz teh predpostavk izhajajo pogoji, ki morajo biti izpolnjeni pri izračunavanju vrednosti parametrov rastne funkcije.

Zato je nujno, da pri izračunavanju vrednosti parametrov uporabimo rezultate merjenja velikega števila dreves, na drugi strani pa ne moremo uporabiti rastne funkcije za prikaz rasti enega samega drevesa. Dejanska rast enega drevesa se razlikuje od rasti, ki jo podaja rastna funkcija in to tembolj, čimvečji je vpliv slučajnostnih dejavnikov. Rastna funkcija podaja odvisnost rezultativnega znaka, ki ima v funkciji lastnost odvisne spremenljivke od merljivih faktorialnih znakov, ki imajo v funkciji lastnosti neodvisnih spremenljivk. K dejavnikom rasti prištevamo poleg dejavnikov rastišča, od katerih je najpomembnejša rodovitnost, tudi čas. V kmetijstvu, ki gospodari le s kratkimi proizvodnimi dobami, običajno analizirajo odvisnost rasti — to je donosa — od rastišča; v gozdarstvu pa se tem faktorjem pridruži še čas oziroma starost. Če podajamo rastno funkcijo za isto drevesno vrsto v okviru istega ali podobnega rastišča za drevesa, kjer so bili enaki gojitveni posegi pa postane čas edina neodvisna spremenljivka. V dosedanji rabi rastnih funkcij smo uporabljali izključno takšne, kjer je podana rast drevesa ali sestoja v odvisnosti od starosti. Verjetno ne bo bistvenih sprememb tudi v bližnji prihodnosti. Iz teh razlogov je zaželeno, da ima rastna funkcija takšno obliko, da so njeni parametri v takšni povezavi, da podajajo ločeno in neposredno karakteristike rastišča, drevesne vrste in gojitvenih ukrepanj. Dosedanje funkcije ali pa vsaj večji del do sedaj uporabljenih rastnih funkcij ima takšno obliko, da s spremembo vrednosti enega parametra, spreminjamo tako karakteristiko rastišča, drevesne vrste in gojitvenih ukrepanj. Zaželena oblika pa je takšna, kjer imata drevesna vrsta in rastišče vpliv na vrednost samo enega parametra, tako da ob različnih jakostih gojitvenih posegov spreminjamo samo drugi parameter, če je funkcija dvoparametrska.

Vsaka rast, če jo predstavimo grafično, ima več ali manj sigmoidno obliko, to je iztegnjeno črko S. Svoj začetek ima v točki nič in svoj zaključek v neki končni točki. Pri drevesu je ta začetna točka takrat, ko seme vzklije, končna pa takrat, ko drevo odmre — to pa je običajno v zelo visoki starosti. Rastna funkcija pa je tista funkcija, ki nam analitično podaja spreminjanje vrednosti znaka, s katerim spremljamo rast med tema dvema točkama. Pri funkciji pogosto postavimo, da drevo ali sestoj zaključita rast šele takrat, ko se njegova starost približa neskončnosti.

Prvi odvod rastne funkcije predstavlja prirastno funkcijo, drugi odvod pa funkcijo rastnega pospeška. Prirastek kot tudi prirastni pospešek imata svoj začetek v točki nič, zato mora rastna funkcija izpolnjevati celo vrsto pogojev, ki jih bomo podrobneje obrazložili pozneje.

Kot smo že navedli, nam rastna funkcija podaja rast, če bi nanjo delovali samo tisti dejavniki, ki so v rastni funkciji podani kot neodvisne spremenljivke, to pa bo v našem primeru starost sestoja ali starost večje skupine dreves in to pri isti drevesni vrsti znotraj ene rastiščne enote in ob enaki gojitveni obravnavi sestoja. Torej nam rastne funkcije nadomestijo dosedanje donosne tablice. Poleg te naloge, to je prikaz rasti, pa nam lahko služijo te funkcije tudi za ugotavljanje karakterističnih točk v rasti in razvoju sestoja.

Čeprav smo spoznali, da rastna funkcija za eno drevo nima prave uporabne vrednosti, jo bomo najprej predstavili na enem drevesu. To funkcijo bomo potem prenesli na sestoj, vendar pa bomo upoštevali razlike, ki nastopajo v rasti med posameznim drevesom in sestojem.

Predpostavimo, da imamo drevo določene drevesne vrste na določenem rastišču ob določenih gojitvenih ukrepih. Rast tega drevesa v času t predstavimo s triparametrsko funkcijo

$$Y(t) = f(t, a, p, n),$$

kjer pomeni:

$Y(t)$ = rast oziroma dosežena velikost vrednosti znaka, na katerem spremljamo rastne spremembe

t = čas, starost drevesa

a, p, n = parametri rastne funkcije, ki so odvisni od rastišča, drevesne vrste in gojitvene obravnave

Pri rasti oziroma doseženi velikosti lahko nastopajo različni znaki drevesa. Običajno so to: volumen drevesa, višina drevesa, temeljnica, premer krošnje, površina krošnje in podobno.

Prvi odvod rastne funkcije predstavlja funkcija tekočega letnega prirastka

$$y\,(t) = \frac{d\,Y}{d\,t}$$

drugi odvod pa funkcija rastnega pospeška

$$u\,(t) = \frac{d^2\,Y}{d\,t^2}$$

Če velikost Y v času t delimo s starostjo t, dobimo povprečni letni prirastek

$$f\,(t) = \frac{Y\,(t)}{t}$$

Te funkcije oziroma krivulje imajo naslednje zveze: funkcija Y (t) ima prevoj v maksimumu tekočega prirastka, krivulja tekočega prirastka ima presečišče s krivuljo povprečnega prirastka v njenem maksimumu. Rastni pospešek spremeni svoj predznak v točki maksimuma tekočega prirastka. Funkcija Y (t) z naraščanjem starosti asimptotično teži k maksimalni vrednosti znaka, s katerim spremljamo rast (maksimalna višina drevesa, maksimalni volumen itd.). Ta asimptota rastne funkcije, ki je tudi njena maksimalna vrednost, je odvisna pri gozdnem drevju le od rastišča in drevesne vrste, ni pa odvisna od gojitvene obravnave.

Čas kulminacije tekočega prirastka in s tem tudi povprečnega, pa je odvisen od rastišča, drevesne vrste in gojitvenega obravnavanja. Svetloljubne drevesne vrste imajo zgodnejšo kulminacijo; zelo podobno delujejo tudi vsi močnejši gojitveni posegi. Gorske in visokogorske lege pomaknejo kulminacijo tekočega prirastka pri isti drevesni vrsti v višjo starost, kot pa jo imajo drevesa v nižjih legah.

Iz vseh teh posebnosti sledi, da bi bila idealna rastna funkcija tista, kjer bi že same vrednosti parametrov a, p in n neposredno določale asimptoto funkcije ter mesto maksimuma tekočega ali povprečnega prirastka; istočasno pa bi bili ti parametri v takšni povezavi, da bi s spreminjanjem vrednosti posamečnega parametra, spreminjali posamične lastnosti rastne funkcije. Tako naj bi bila asimptota odvisna samo od enega parametra, mesto prevoja funkcije od drugega in konvergenca od tretjega.

3. ANALITIČNE FUNKCIJE RASTI

I.

Pri obravnavanju analitičnih funkcij rasti lesne mase (višine, temeljnice itd.) izberemo za neodvisno spremenljivko čas $t \geqq 0$. V naslednjem bomo obravnavali naslednje analitične funkcije rasti:

1. Y (t) (1)
rastna funkcija ali funkcija rasti

2. y (t) (2)
prirastna funkcija ali funkcija tekočega letnega prirastka

3. u (t) (3)
funkcija rastnega pospeška

4. f (t) (4)
funkcija povprečne rasti lesne mase

5. s (t) (5)
funkcija enakomerne rasti

Zadnje štiri funkcije so izvedene iz prve; zanje veljajo definicije:

Funkcija y (t) je odvod funkcije Y (t):

$$y(t) = \frac{d\,Y(t)}{d\,t} \qquad 2)$$

Funkcija u (t) je prvi odvod funkcije y (t) in drugi odvod funkcije Y (t):

$$u(t) = \frac{d\,y(t)}{d\,t} = \frac{d^2\,Y(t)}{d\,t^2} \qquad (3)$$

Funkcija f (t) je kvocient funkcije Y (t) in neodvisne spremenljivke t:

$$f(t) = \frac{Y(t)}{t} \qquad (4)$$

Funkcija s (t) je linearna:

$$s(t) = m\,t \qquad (5)$$

in je definirana takole: premica, ki ponazarja funkcijo s (t) je tangenta iz koordinatnega izhodišča na krivuljo, ki ponazarja funkcijo Y (t). Pri tem je m ustrezni smerni koeficient premice.

Navedene analitične funkcije rasti je treba določiti tako, da zadoščajo naslednjim zahtevam:

Zahteve za funkcijo Y (t):

1 a. $Y(0) = 0$ funkcija začne v koordinatnem izhodišču.

1 b. $\frac{dY(0)}{dt} = 0$

funkcija ima v koordinatnem izhodišču abscisno os za tangento.

1 c. $\lim_{t \to \infty} Y(t) = a$

z naraščajočim t konvergira funkcija asimptotično proti asimptoti $y = a$.

1 d.

Funkcija monotono narašča.

1 e.

Funkcija ima prevoj v točki $t = p$.

Zahteve za funkcijo y (t):

2 a. $y(0) = 0$

funkcija začne v koordinatnem izhodišču.

2 b. $\frac{dy(0)}{dt} = 0$

funkcija ima v koordinatnem izhodišču abscisno os za tangento.

2 c. $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$

z naraščanjem t konvergira funkcija asimptotično proti abscisni osi.

2 d. $y(t) \geqq 0$

funkcija je pozitivna, razen v koordinatnem izhodišču, kjer je enaka O.

2 e .

Funkcija ima edini maksimum v točki t = p.

Zahteve za funkcijo u (t) :

3 a . u (0) = 0

funkcija začne v koordinatnem izhodišču.

3 b . u (p) = 0

funkcija seka abscisno os samo še v točki

t = p .

3 c . $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$

z naraščajočim t konvergira funkcija asimptotično proti abscisni osi kot asimpoti.

Za funkcijo f (x) ne predpišemo nobene dodatne zahteve; njene lastnosti so posledica zahtev, ki smo jih predpisali drugim funkcijam.

Smerni koeficient m v linearni funkciji

s (t) = m t

je treba določiti tako, da je premica, ki to funkcijo ponazarja, tangenta na krivuljo, ki ponazarja funkcijo Y (t).

V obravnavanih funkcijah uvedemo tri parametre:

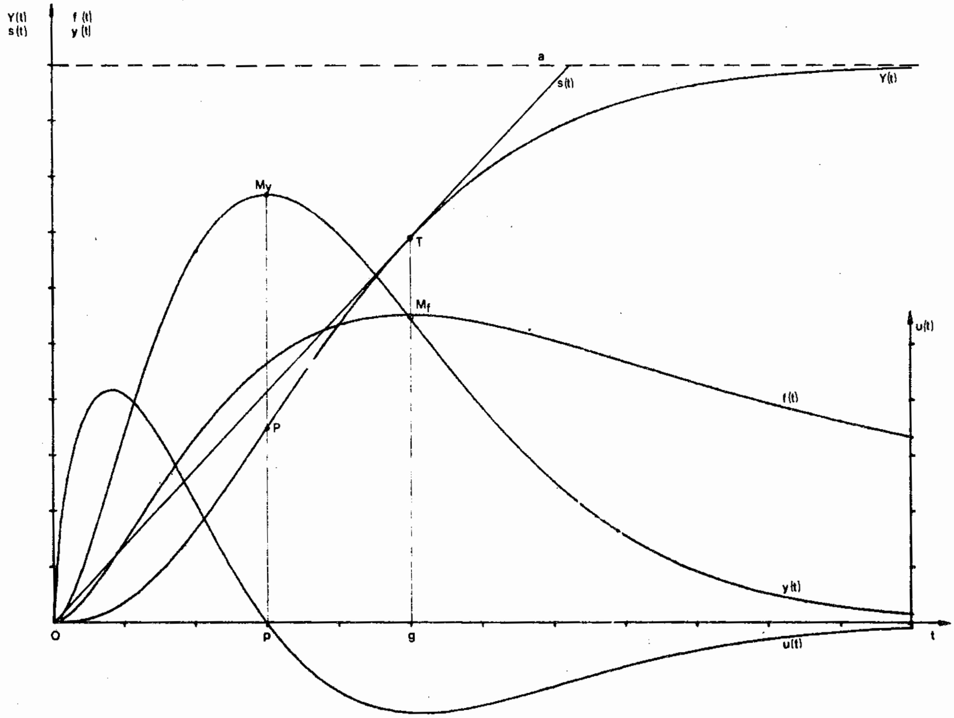
1. Parameter $a > 0$ je *višina asimptote* funkcije Y (t).

2. Parameter $p > 0$ je *abscisa prevoja* funkcije Y (t).

3. Parameter $n > 1$ je *stopnja konvergence*. S tem parametrom spreminjamo hitrost konvergence funkcij pri naraščanju neodvisne spremenljivke t. Ta parameter uporabimo lahko tudi kot mero za nesimetričnost funkcije y (t).

Ne glede na to, katere tipe analitičnih funkcij izberemo in kakšne so vrednosti v njih nastopajočih parametrov, lahko ugotovimo za funkcije neke splošne lastnosti, ki jih ilustrira slika 1.

Slika 1 : ANALITIČNE FUNKCIJE RASTI
(Fig.1 : Analytical growth functions)



Funkcija Y (t) ima prevoj P v točki t = p, v kateri ima funkcija y (t) maksimum M_y.

Absciso presečišča M_f funkcij y (t) in f (t) izračunamo iz enačbe:

$$y\ (t) = f\ (t)$$

$$y\ (t) = \frac{1}{t}\ Y\ (t)$$

$$t\ y\ (t) - Y\ (t) = 0 \qquad (6)$$

Ta enačba naj ima koren t = g.

Funkcija f (t) ima maksimum M_f; njegovo absciso izračunamo iz enačbe, ki jo dobimo, če izenačimo njen prvi odvod z O:

$$\frac{d\,f\,(t)}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\left(\frac{1}{t}\,Y\,(t)\right) = \frac{1}{t^2}\,(t\,y\,(t) - Y\,(t)) = 0$$

Od tod sledi za absciso maksimuma M_f zopet enačba (6).

Funkcija f (t) ima torej maksimum v t = g.

Funkcija Y (t) in s (t) se dotikata v točki T; izračunajmo absciso tega dotikališča. V dotikališču T teh dveh funkcij sta enaki njuni funkcijski vrednosti in enaka sta tudi njuna prva odvoda. Od tod dobimo sistem dveh enačb z neznankama t in m:

$$Y\,(t) = m\,t$$

$$\frac{d\,Y\,(t)}{d\,t} = m$$

Iz prve enačbe sledi:

$$m = \frac{1}{t}\,Y\,(t) = f\,(t) \qquad (7)$$

Če to vstavimo v drugo enačbo, dobimo enačbo:

$$y\,(t) = f\,(t)$$

ki smo jo že srečali pri računanju presečišča M_f funkcij y (t) in f (t). Abscisa dotikališča T je potemtakem enaka abscisi presečišča M_f funkcij y (t) in f (t) in hkrati tudi abscisi maksimuma M_f funkcije f (t). Zato je tudi abscisa dotikališča T koren enačbe (6).

Izhajajoč od enačbe (7) izračunamo smerni koeficient m linearne funkcije

$s\,(t) = m\,t$
tako, da vstavimo v to enačbo t = g in dobimo:

$$m = \frac{1}{g}\,Y\,(g) = f\,(g) \qquad (8)$$

II.

Za rastno funkcijo izberemo analitično funkcijo:

$$Y\,(t) = a\left[1 - \left(1 + \frac{2n-1}{np^n}\,t^n\right)\exp\left(-\frac{2n-1}{np^n}\,t^n\right)\right] \qquad (1)$$

Tako izbrana rastna funkcija zadošča vsem predpisanim zahtevam:

1 a . $Y(0) = 0$

1 b . $\frac{d\,Y(0)}{d\,t} = 0$

1 c . $\lim_{t \to \infty} Y(t) = a$

Hitrost konvergence je odvisna od vrednosti parametra n; čim večja je vrednost parametra n, tem hitreje konvergira funkcija proti limiti a.

1 d .

Funkcija monotono narašča.

1 e .

Funkcija Y (t) ima v točki t = p prevoj:

$P(p, a\left[1 - (1 + \frac{2n-1}{n}) \exp(- \frac{2n-1}{n})\right])$

Ordinata prevoja je odvisna samo od parametrov a in n, ni pa odvisna od parametra p.

Če odvedemo rastno funkcijo Y (t), dobimo prirastno funkcijo:

$$y(t) = an\,(\frac{2n-1}{np^n})^2\, t^{2n-1} \exp(- \frac{2n-1}{np^n}\, t^n) \qquad (2)$$

Tudi ta funkcija zadošča vsem predpisanim zahtevam:

2 a . $y(0) = 0$

2 b . $\frac{d\,y(0)}{d\,t} = 0$

2. c . $\lim_{t \to \infty} y(T) = 0$.

Hitrost konvergence je odvisna od vrednosti parametra n; čim večja je vrednost parametra n, tem hitreje konvergira funkcija proti limiti O.

2 d . $y(t) > 0$, če je $t > 0$.

2 e .

Funkcija ima v točki t = p edini maksimum:

$$M_p \left(p, \frac{a\,(2n-1)^2}{n\,p} \exp\left(-\frac{2n-1}{n}\right)\right)$$

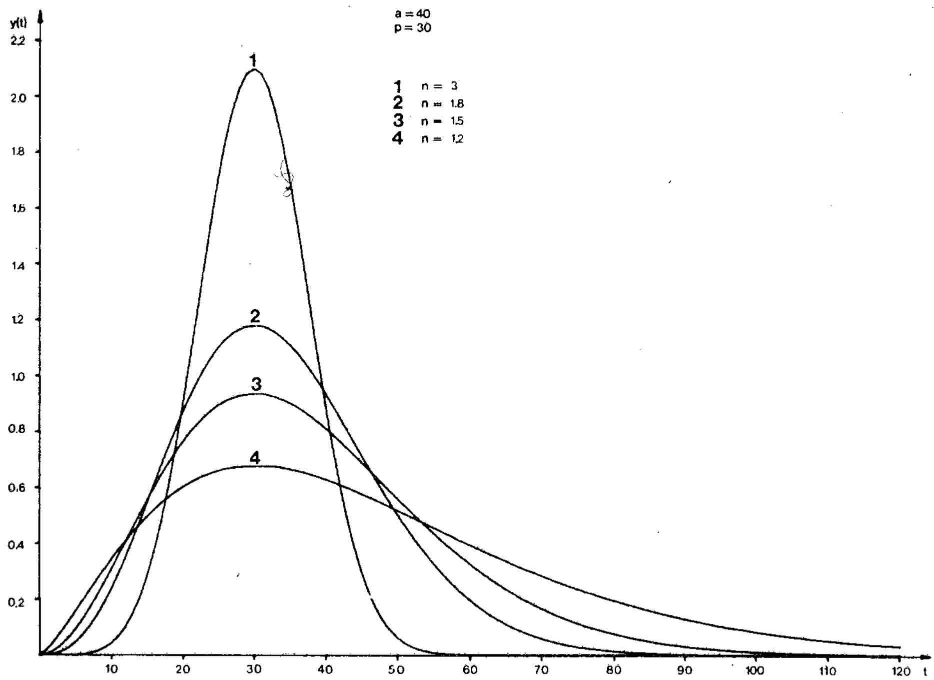
Krivulja, ki ponazarja funkcijo y (t), ni simetrična glede na vertikalno os, ki gre skozi maksimum M_p. Dokler je vrednost parametra n le malo večja od 1, je krivulja izrazito nesimetrična; z naraščajočim n pa postaja nesimetričnost vedno manj izrazita.

Družino funkcij y (t, a, p, n) za vrednost parametrov a = 40 in p = 30 ter za vrednost parametra

$$\{n : 1{,}2 \; ; \; 1{,}5 \; ; \; 1{,}8 \; ; \; 3\}$$

ponazarjajo krivulje na sliki 2.

Slika 2 : FUNKCIJE y(t) GLEDE NA RAZLIČNE VREDNOSTI STOPNJE KONVERGENCE (n)
(Fig. 2 : Functions y(t) with regard to different value of n – coefficient of convergence)



Če odvedemo prirastno funkcijo y (t), dobimo funkcijo rastnega pospeška:

$$u(t) = an^2 \left(\frac{2n-1}{np^n}\right)^3 t^{2n-2} (p^n - t^n) \exp \left(- \frac{2n-1}{np^n} t^n\right) \tag{3}$$

Tudi ta funkcija zadošča vsem predpisanim zahtevam:

3 a. $u(0) = 0$

3 b. $u(p) = 0$

3 c. $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$

Funkcija je intervalu (0, p) pozitivna, na intervalu (p, ∞) pa je negativna.
Če delimo rastno funkcijo Y (t) z neodvisno spremenljivko t, dobimo funkcijo povprečne rasti

$$f(t) = \frac{a}{t} \left[1 - \left(1 + \frac{2n-1}{np^n} t^n\right) \exp \left(- \frac{2n-1}{np^n} t^n\right) \right] \tag{4}$$

Funkcija ni definirana v točki t = 0, njena limita v tej točki pa je enaka 0:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = 0$$

To dokažemo z l'Hospitalovim pravilom:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} \frac{Y(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{d\,Y(t)}{d\,t} = \lim_{t \to 0} y(t) = 0$$

zaradi lastnosti 2 c funkcije y (t).

Z naraščajočim t konvergira funkcija proti 0:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$$

Funkcija f (t) je na intervalu $(0, \infty)$ pozitivna.

Funkcija f (t) ima odvod prvega reda:

$$\frac{df(t)}{dt} = - \frac{a}{t^2} \left[1 - (1 + \frac{2n-1}{np^n} t^n + n(\frac{2n-1}{np^n})^2 t^{2n}) \exp (- \frac{2n-1}{np^n} t^n) \right]$$

Če izenačimo ta odvod z 0, dobimo za vrednost t = g transcendentno enačbo:

$$1 - (1 + \frac{2n-1}{np^n} t^n + n (\frac{2n-1}{np^n})^2 t^{2n}) \exp (-\frac{2n-1}{np^n} t^n) = 0 \qquad (6)$$

To enačbo rešimo po kaki metodi zaporednih približkov.

S tem, da smo rešili enačbo (6) in izračunali vrednost g, smo izračunali:

1. absciso maksimuma M_f funkcije f (t),
2. absciso presečišča M_f funkcij y (t) in f (t) in
3. absciso dotikališča T funkcij Y (t) in s (t).

Linearna funkcija s (t) ima po obrazcu (8) smerni koeficient:

$$m = \frac{1}{g} Y (g) = f (g) \qquad (8)$$

Zato ima ta funkcija enačbo:

$$s (t) = \frac{t}{g} Y (g) = t f (g) \qquad (5)$$

Numerični primer

V numeričnem primeru so za parametre a, p in n izbrane naslednje konstante:

a = 40 (maksimalna višina drevesa)
p = 30 (starost, pri kateri kulminira tekoči višinski prirastek)
n = 1,3 (stopnja konvergence).

Če te konstante postavimo:

1. v rastno funkcijo (1)

dobimo:

$$Y(t) = 40 [1-(1 + 0{,}0148\, t^{1,3}) \exp (- 0{,}0148\, t^{1,3})] \qquad (1)$$

2. v prirastno funkcijo (funkcijo tekočega prirastka) (2)

dobimo:

$$y(t) = 0{,}0114\, t^{1{,}6} \exp\,(-\,0{,}0148\, t^{1{,}3}) \qquad (2)$$

3. v funkcijo povprečnega prirastka (3)

ima le-ta obliko:

$$f(t) = \frac{40}{t}\left[1 - (1 + 0{,}0148\, t^{1{,}3}) \exp\,(-\,0{,}0148\, t^{1{,}3})\right] \qquad (3)$$

4. v funkcijo rastnega pospeška (4)

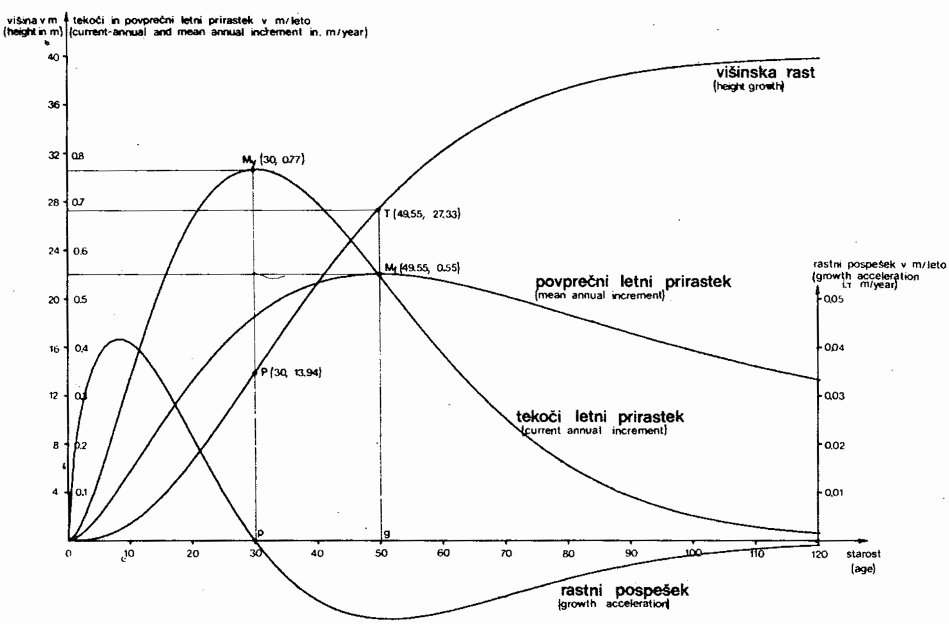
dobimo:

$$u(t) = 0{,}0002\, t^{0{,}6}\,(30^{1{,}3} - t^{1{,}3}) \exp\,(-\,0{,}0148\, t^{1{,}3})$$

oziroma:

$$u(t) = (0{,}0182\, t^{0{,}6} - 0{,}0002\, t^{1{,}9}) \exp\,(-\,0{,}0148\, t^{1{,}3}) \qquad (4)$$

Slika 3: GRAFIČEN PRIKAZ RASTI DREVESA V VIŠINO (a = 40, p = 30, n = 1,3) S PREDLAGANO RASTNO FUNKCIJO
(Fig. 3: An example of tree height growth expressed by in paper given growth function (a = 40, p = 30, n = 1.3))



Na sliki 3 so predstavljene funkcije (1), (2), (3) in (4). Na osi y imamo tri različna merila. Levo merilo na levem robu je merilo za rastno funkcijo (1), desno merilo na levem robu je merilo za prirastno funkcijo (funkcijo tekočega prirastka) (2) in funkcijo povprečnega prirastka (3); merilo na desnem robu slike 3 pa je merilo za funkcijo rastnega pospeška (4).

Starost kulminacije povprečnega prirastka g, ki je rešitev enačbe

$$t\, y(t) - Y(t) = 0$$

oziroma enačbe

$$\frac{d\, f(t)}{d\, t} = 0$$

se dobi, če se s kako metodo zaporednih približkov reši transcendentna enašba:

$$1 - (1 + \frac{2n-1}{np^n} t^n + n (\frac{2n-1}{np^n})^2 t^{2n}) \exp (-\frac{2n-1}{np^n} t^n) = 0$$

Le-ta se pri izbranih parametrih glasi:

$$1 -(1 + 0{,}0148\, t^{1,3} + 0{,}0003\, t^{2,6}) \exp (- 0{,}0148\, t^{1,3}) = 0 \, .$$

in nam da rešitev
$g \doteq 49{,}5449 \doteq 49{,}54$

Glede na izračunani g pa je funkcija enakomerne rasti, to je linearna funkcija s (t), enaka:

$$s(t) = f(g)\, t = 0{,}5517\, t$$

Prevoj rastne funkcije Y (t) je v točki

$$P (p, Y(p)) = P (30 ; 13{,}9386)$$

Maksimum prirastne funkcije (funkcije tekočega prirastka) y (t) je v točki

$$M_y (p, y(p)) = M_y (30 ; 0{,}7669)$$

Maksimum funkcije povprečnega prirastka f (t) oziroma sečišče prirastne funkcije y (t) in funkcije povprečnega prirastka f (t) je v točki

M_f (g, f (g) = y (g))
M_f (49,5449 ; 0,5517)

Dotikališče funkcije enakomerne rasti s (t) z rastno funkcijo Y (t) pa je v točki

T (g, Y (g) = s (g))
T (49,5449 ; 27,3344)

4. DOLOČEVANJE PARAMETROV

Če razpolagamo s podatki meritev v času rasti za eno drevo, lahko določimo vrednosti parametrov njegove rastne funkcije na dva načina, in to ob pogoju, da je število merjenj za vrednosti Y (t) večje kot pa je število parametrov rastne funkcije.

a) **Metoda najmanjših kvadratov**

Empiričnim podatkom aproksimiramo rastno funkcijo izbranega tipa Y (t), po metodi najmanjših kvadratov. Po tej metodi je vsota kvadratov odstopanj dejanskih vrednosti od izračunanih vrednosti preko rastne funkcije minimalna. To običajno zapišemo v naslednji obliki:

$$\min \quad \{\Sigma(Y_t - Y_{pril.})^2\}$$

Ta metoda zahteva, da rastno funkcijo lineariziramo. Pri teh transformacijah transformiramo ali spremenljivko Y ali pa spremenljivko t ali pa celo obe, torej vpeljemo nove spremenljivke. Metoda aproksimacije z najmanjšimi kvadrati v tem primeru zagotavlja, da bo vsota kvadratov odstopanj med transformiranimi vrednostmi za Y (t) in prilagojenimi vrednostmi za transformirano spremenljivko najmanjša.

Če Y (t) transformiramo v Z in t v s, potem ta metoda zagotavlja

$$\min \quad \{\Sigma(Z_s - Z_{pril.})^2\}$$

Če tako dobljeno rastno funkcijo prevedemo v izhodiščno obliko, dobimo funkcijo

$Y_{pril.} = f\ (t, a_1, p_1, n_1)$

in ne funkcije

$Y_{pril.} = f\ (t, a, p, n)$

ki zagotavlja takšne vrednosti za a, p in n, da velja

$$\min \quad \{\Sigma(Y_t - Y_{pril.})^2\}$$

Do podobnega rezultata pridemo tudi preko aproksimacije danim podatkom po metodi delnih vsot. Pri tej metodi, ki zahteva meritve v enakih časovnih razmakih, razdelimo območje prilagoditve na tri enake časovne intervale. Znotraj vsakega intervala tvorimo vsote vrednosti znaka Y_t oziroma njegove transformirane vrednosti. Iz teh členov potem izračunamo parametre rastne funkcije. To metodo uporabljamo za tiste oblike rastnih funkcij, ki s transformacijami preidejo v naslednjo obliko:

$$Y = k + b\,c^{\,t}$$

Vendar tako izračunani parametri ne zagotavljajo, da bo vsota kvadratov odstopanj minimalna.

b) **Metoda izbranih točk**

Če smo prvo metodo imenovali metodo najmanjših kvadratov, potem lahko naslednjo metodo imenujemo metoda izbranih točk. Iz podatkov Y (t) in t za posamezno drevo neposredno določimo parametre a, p in n, in sicer v vseh tistih primerih, ko so ti parametri tudi karakteristične točke rastne ali prirastne funkcije. Predpostavimo, da predstavlja a asimptoto funkcije, kar pomeni v našem primeru največjo višino ali pa največji volumen, ki ga lahko drevo dane drevesne vrste doseže na danem rastišču. Parameter p naj predstavlja starost, v kateri kulminira tekoči prirastek drevesa oziroma čas, ko nastopi prevoj rastne funkcije, n pa je stopnja konvergence rastne funkcije. Iz podatkov meritev lahko direktno ugotovimo vrednosti a in p. V primerih, ko drevo še ni doseglo svoje maksimalne vrednosti, pa uporabimo oziroma dobimo ta podatek meritev na podobnih rastiščih pri isti drevesni vrsti. Čas prevoja določimo s tvorjenjem razlik za vrednosti Y (t). Te razlike predstavljajo tekoče dobne prirastke. Če te razlike delimo s številom let, ki so pretekla med dvema sosednjima vrednostima za Y (t), dobimo povprečni tekoči dobni prirastek, ki pa se le neznatno razlikuje od tekočega letnega prirastka.

V tisti starosti, ko prične ta prirastek padati oziroma se zmanjševati, je njegova kulminacija oziroma vrednost prednost parametra n ugotovimo s poskušanjem. Običajno so rastne funkcije v takšni obliki, da se giblje njegova vrednost na majhnem intervalu, zato dobimo razmeroma dobro oceno te vrednosti že pri majhnem številu poskušanj. Ustreznost vrednosti n preskušamo z vsoto kvadratov odstopanj

$$\Sigma(Y_t - Y_{pril.})^2$$

Čim manjša je ta vsota, tem boljša je prilagoditev, tem bližje je ocena za n pravi vrednosti. Nekatere rastne funkcije pa imajo takšno obliko, da moramo preskušati hkrati dva parametra, kar pa pomeni tudi več računanja.

Na vprašanje, katera metoda prilagoditve je boljša, je težko odgovoriti. Vsota kvadratov odstopanj je po metodi najmanjših kvadratov manjša, kar pomeni boljšo prilagoditev v teku cele življenjske dobe drevesa, na drugi strani pa nam tako dobljena funkcija premakne mesto dejanske kulminacije tekočega prirastka in spremeni vrednost za dejansko doseženo maksimalno vrednost drevesa. V gozdarstvu se pogosto srečujemo z rastnimi funkcijami, kjer njihovi parametri niso v neposredni povezavi s karakterističnimi točkami, to so predvsem tiste funkcije, ki samo na nekem delu svojega intervala ponazarjajo rast drevesa in pri teh funkcijah moramo določati vrednosti parametrov po metodi najmanjših kvadratov.

5. FUNKCIJE SESTOJA

V prejšnjem poglavju smo obravnavali metode določanja rastne funkcije za eno drevo, čeprav, kot smo že omenili, tu nimajo praktičnega pomena. Za eno drevo nam potek rasti najboljše in najlepše podajajo podatki sami oziroma grafikon, na katerem te vrednosti povezuje poligonska črta. Pri enem drevesu se slučajnosti vplivi ne morejo uničiti, zato je njihov učinek v vseh vrednostih rezultativnega znaka. Rastno funkcijo enega drevesa smo obravnavali zaradi lažjega razumevanja rastne funkcije sestoja ali dela sestoja.

Pri sestoju in delu sestoja razlikujemo pri tistih znakih, ki podajajo rast, takšne znake, ki so sestavljeni in odvisni od števila dreves in znake, ki so neodvisni od števila dreves.

Tako so lesna zaloga sestoja, prirastek, srednja temeljnica in skupna temeljnica tesno povezani s številom drevja v sestoju, medtem ko sta zgornja višina sestoja in biološka zgornja višina praktično neodvisni od števila dreves, seveda pri isti starosti znotraj istega rastišča.

Za razumevanje poteka rasti bomo izbrali dva primera, in sicer lesno proizvodnjo sestoja in zgornjo višino sestoja.

Z rastjo in razvojem sestoja narašča zaradi rasti dreves v višino in debelino tudi lesna zaloga, istočasno pa v sestoju poteka proces izločanja, to je del dreves odmre ali pa jih odstranimo z gojitvenimi ukrepi.

Zato potekata pri rasti sestoja dva nasprotna procesa in to naraščanje lesne zaloge zaradi rasti dreves in zmanjševanje lesne zaloge zaradi izločanja dreves. Dokler je priraščanje dreves v sestoju večje, kot pa je izločanje, toliko časa narašča lesna zaloga stoječega sestoja. V sestoju imamo dve rastni krivulji, in sicer: prva nam podaja kumulativo celotne lesne proizvodnje, to je lesna zaloga sestoja povečana za lesno maso izločenih dreves. Druga rastna krivulja pa nam podaja rast lesne zaloge stoječega sestoja. Prirastek vedno nastaja na lesni zalogi stoječega sestoja, zato bi na prvi pogled funkcijo rasti krivulje sestoja imela funkcija lesne zaloge stoječega sestoja; vendar pa je takšno sklepanje napačno. Če izhajamo s krivulje tekočega prirastka, potem je rastna funkcija integralska krivulja tekočega prirastka. Integralska krivulja teh prirastkov pa je krivulja celotne lesne proizvodnje, tj. lesne mase stoječega sestoja in lesne mase izločenih dreves. Podobno je funkcija povprečnega prirastka količnik med funkcijo celotne lesne proizvodnje in starostjo.

Določitev rastne krivulje za lesno zalogo (to je lesno proizvodnjo) poteka preko metode izbranih točk, to je tako, da del parametrov določimo preko meritev, del parametrov pa s poskušanjem.

Za primer vzemimo zopet triparametrsko funkcijo

$$Y(t) = f(t, a, p, n)$$

kjer parameter a podaja maksimalno lesno proizvodnjo dane drevesne vrste na danem rastišču, parameter p pa starost, kjer kulminira tekoči letni prirastek sestoja, parameter n pa stopnjo konvergence rastne funkcije oziroma stopnjo asimetrije krivulje tekočega prirastka.

Celotne lesne proizvodnje sestoja ne moremo določiti z meritvami stoječega sestoja, ker so nam podatki o izločenih drevesih največkrat nepoznani. Te vrednosti parametra a imamo že za precejšen del naših gozdnih rastišč in naših drevesnih vrst znane. Vrednost parametra p, ki je odvisna od jakosti gojitvenih ukrepov, rastišča in drevesne vrste, pa bo potrebno ugotoviti. Te vrednosti lahko dobimo s spremljavo tekočega prirastka sestoja. Iz podatkov, ki kažejo gibanje tekočega prirastka sestoja, izračunamo čas kulminacije, ko je ta kulminiral. Če razpolagamo z večjim številom sestojev na istih rastiščih z istimi drevesnimi vrstami ob enakih jakostih gojitvenega ukrepanja, potem je srednja vrednost parametra p zelo zanesljiva — seveda ob pogoju, da je variabilnost teh časov kulminacij majhna. Opozoriti moramo, da kulminacija tekočega prirastka sestoja ni povprečje kulminacij tekočega prirastka dreves, ki ta sestoj tvorijo. Sestojni tekoči prirastek kulminira v nižji starosti, kot pa prirastek teh dreves. Ta razlika znaša tudi po več desetletij. To prehitevanje sestojne kulminacije je posledica naglega izločanja dreves in pa njene odvisnosti od površine sestoja.

Ko imamo vrednosti parametrov a in p, poiščemo vrednost za n s postopnim prilagajanjem funkcije dejanskim vrednostim tekočega prirastka. Kriterij uspešnosti prilagoditve je vsota kvadratov odstopanj prilagojenih vrednosti od dejanskih vrednosti. Če ugotavljamo vrednosti parametrov a, p in n, po metodi najmanjših kvadratov, dobimo sicer za celotno območje boljšo prilagoditev, vendar ta prilagojena funkcija odstopa v točki a in p. Ker so te vrednosti še posebej pomembne pri gospodarjenju z gozdovi, se največkrat odpovemo metodi najmanjših kvadratov in prilagajamo po metodi izbranih točk.

Pri rastni funkciji zgornje višine sestoja pa imamo primer, ko z rastjo sestoja ne prihaja, ali pa le izjemoma, do izločanja tistih osebkov, ki določajo njeno vrednost. Zgornjo višino sestoja predstavlja povprečje sto najdebelejših dreves na hektar in ta ostanejo skoraj vedno ista v teku rasti in razvoja sestoja. Na osnovi vrednosti višin za posamezna drevesa neposredno ugotovimo zgornjo sestojno višino. Če imamo te vrednosti v različnih starostih dreves, dobimo tudi zgornjo višino sestoja glede na starost in s tem točke, h katerim prilagodimo rastno funkcijo. V tem primeru lahko uporabimo metodo izbranih točk, kakor tudi metodo najmanjših kvadratov. Metodo izbranih točk bomo uporabili, če bomo že na osnovi podatkov merjenja lahko določili karakteristične točke rasti in razvoja sestoja (parametra a in p). Če pa nam podatki merjenj ne nudijo, da neposredno določimo te parametre, bomo izbrali metodo najmanjših kvadratov. Ta primer nastopi, ko proučevani sestoji še niso dosegli svoje največje vrednosti za zgornjo višino. V tem primeru nam rastna funkcija služi za ugotavljanje vrednosti karakterističnih točk rasti in razvoja sestoja. V večini primerov pa se bomo tudi tukaj poslužili metode izbranih točk, ker že danes razpolagamo z maksimalnimi vrednostmi za zgornje višine za vse naše glavne drevesne vrste na pretežnem delu gozdnih rastišč v Sloveniji. Če rastno funkcijo za zgornjo sestojno višino vežemo na te že znane podatke, povečamo njeno natančnost in s tem njeno praktično uporabnost v gozdarstvu.

6. ZAKLJUČEK

Rastne krivulje, ki podajajo rast oziroma spremembe posameznih znakov sestoja v času njegove rasti, nam nadomeščajo donosne tablice oziroma nam rabijo pri njihovi sestavi. Ravno tako so rastne funkcije nepogrešljiv pripomoček pri sestavi različnih modelov gospodarjenja z gozdovi.

V zadnji preteklosti smo v Sloveniji odklanjali donosne tablice in razne modele in to zaradi njihove nestvarnosti oziroma velikih odmikov od rasti dejanskih sestojev. Te tablice in modeli niso upoštevali specifičnosti rastišč, drevesnih vrst in gospodarjenja z gozdovi. Običajno so vsa naša gozdna rastišča razdelile na pet rodovitnostnih razredov (bonitetni razredi), v katerih predpostavljajo enako rast in razvoj posamezne drevesne vrste. Novejša znanja kažejo, da raznolikost rastišč ne moremo izraziti samo z njihovo rodovitnostjo, zato bonitetne razrede nadomeščamo z rastiščnimi enotami na osnovi sintaksonomskih enot. Te enote, ki združujejo podobna rastišča v določenem intervalu podobnosti oziroma istovetnosti, so dobra osnova za sestavo donosnih tablic oziroma rastnih funkcij. Oblika rastnih funkcij pa mora biti takšna, da njihov potek kar najbolj verno podaja rast dejanskih sestojev, to pa pomeni, da morajo imeti zadostno število parametrov. Nadalje želimo, da so parametri takšni, da direktno podajajo karakteristične točke razvoja sestoja in rastišča. Na ta način že iz vrednosti posameznega parametra lahko spoznamo ali imamo opravka npr. z bolj rodovitnimi rastišči, kdaj nastopajo kulminacije prirastkov, ali se rast po kulminaciji tekočega prirastka hitro zaključi in podobno.

Če analiziramo prve rastne funkcije, ki smo jih uporabljali v gozdarstvu, vidimo, da imajo majhno število parametrov in da so zato toge, ali pa so te funkcije v takšni obliki, da sploh ne podajajo posameznih karakterističnih točk rastišča in rasti sestoja.

Tako je SPAETH že leta 1797 predložil za posamezne odseke rastne krivulje funkcijo

$$Y = a^{t}$$

Parameter a je ugotavljal posebej za posamezne dele celotne rastne krivulje. Leta 1837 je SEIDL predložil funkcijo polinomske oblike

$$Y = a\,t + b\,t^2 + c\,t^3 + \ldots + r\,t^n$$

Če pogledamo, je tukaj točka kulminacije tekočega prirastka vezana na vse parametre. HOSSFELD je predlagal leta 1822 kot rastno funkcijo

$$Y = \frac{a\,t^2}{b + c\,t + t^2}$$

To isto funkcijo je podrobneje analiziral PRODAN (1944) in jo je tudi nekoliko preuredil. V Sloveniji smo ravno to funkcijo najpogosteje uporabljali za prikaz višinske rasti drevesa ali sestoja; vendar pa ima iste slabosti kot funkcija, ki jo je prsdložil SEIDL, samo da je bolj prilagodljiva.

V Jugoslaviji so precej uporabljali funkcijo MIHAJLOV-a (1947), ki ima naslednjo obliko:

$$Y = a\,e^{t^{\frac{r}{s}}}$$

Ta funkcija izpolnjuje vse pogoje rastne funkcije in ima tri parametre, vendar pa je nekoliko pretoga in ne podaja dobro posebnosti posameznih drevesnih vrst in rastišč.

V svetu precej uporabljajo MITSCHERLICH-ovo funkcijo iz leta 1919:

$$Y = Y_{maks}\,(1 - e^{-kt})$$

vendar pa je ta uporabnejša za prikaz odvisnosti rasti od ostalih rastiščnih faktorjev in manj za prikaz rasti v odvisnosti od starosti sestoja.

Od rastnih funkcij smo navedli samo tiste, ki so nastale v začetku njihovega uvajanja v gozdarstvo in pa tiste, ki smo jih ali pa jih uporabljamo v Sloveniji. Podrobnejši prikaz vseh do sedaj uporabljenih rastnih funkcij v gozdarstvu bi zahteval preveč prostora, ker ima skoraj vsak strokovnjak, ki se je udejstvoval na področju prirastoslovja in urejanja gozdov svojo rastno funkcijo; nekateri pa celo po tri ali štiri.

Tudi Jugoslovani nismo izjema; prej nasprotno, saj je v zadnjih dvajsetih letih znanstveno delalo na tem področju najmanj pet strokovnjakov (Todorović, Pantić, Radonjić, Stamenković, Timotijević). Skoraj nerazumljivo je, da v Sloveniji, ki ima dolgoletno tradicijo v gozdarstvu in še posebej v urejanju gozdov (Hufnagl, Schollmayer, Pipan) ni nihče do danes poskušal najti rastno funkcijo, ki bi ustrezala našim zahtevam. To vrzel skušamo sedaj zapolniti, ko predlagamo funkcijo, ki je na prvi pogled precej obsežna, zato pa zelo prilagodljiva. Še posebej pa ima veliko vrednost v tem, da je njen prvi parameter a odvisen od rastišča in drevesne vrste in da nam vrednost tega parametra predstavlja pravzaprav rodovitnost rastišča za posamezno drevesno vrsto. Nadaljnja parametra, p in n, pa podajata vpliv gojitvenih ukrepov in vpliv rastišča na lego posameznih karakterističnih točk rastne krivulje. Funkcija izpolnjuje vse pogoje, ki naj jih ima "dobra rastna funkcija" in zato je primerna, da nadomesti celo vrsto funkcij, ki smo jih do sedaj uporabljali v gozdarstvu.

7. POVZETEK

Rastno funkcijo uporabljamo za analitično predstavitev rasti sestojev. Uporaba rastnih funkcij za ponazoritev rasti posameznega drevesa je največkrat neumestna oziroma neustrezna. ker na njegovo rast premočno vplivajo slučajnostni faktorji. Učinek teh faktorjev se uniči ali pa močno omili, če prikazujemo ali proučujemo rast večjega števila dreves ali sestoja.

Pri izračunavanju vrednosti parametrov rastne funkcije sestoja imamo dve možnosti, in sicer — da izračunamo te vrednosti po metodi najmanjših kvadratov ali pa po metodi izbranih točk. Po metodi najmanjših kvadratov je potrebno funkcijo linearizirati. Običajno je za linearizacijo teh funkcij potrebna takšna transformacija spremenljivk, da pri ponovni prevedbi novih spremenljivk v izhodiščno spremenljivko, dobimo takšne vrednosti parametrov. da vsota kvadratov odstopanj prilagojenih vrednosti od dejanskih vrednosti ni več minimalna. Pri metodi izbranih točk pa na osnovi meritvenih podatkov neposredno določimo vrednosti posameznih parametrov. Ta metoda je uporabna pri tistih oblikah rastne funkcije, kjer nam posamezni parametri predstavljajo karakteristične točke rasti in razvoja sestoja in karakteristične točke rastišča. Kdaj uporabiti katero od teh dveh metod. je odvisno od tega, kateri znak rasti proučujemo. Če nam rastna funkcija podaja rast lesne proizvodnje sestoja, je primernejša metoda izbranih točk. Tu ni možna metoda najmanjših kvadratov, ker podatki o karakterističnih točkah rasti posameznih dreves ne morejo služiti aproksimaciji rastne sestojne krivulje. To sledi iz zakonitosti. da npr. sestojna kulminacija tekočega prirastka lesne mase nastopa v nižji starosti. kot pa kulminacija istega prirastka posameznih dreves. Za izračun vrednosti parametrov rastne krivulje sestoja moramo imeti na razpolago podatke o gibanju tekočega prirastka sestoja. V kolikor pa nam rastna funkcija podaja rast npr. zgornje višine sestoja. pa sta možni obe metodi pri izračunu vrednosti parametrov te rastne funkcije.

Kot zelo primerno obliko rastne funkcije podajamo triparametrsko funkcijo

$$Y\ (t) = f\ (t,\ a,\ p,\ n)$$

kjer pomeni:

$$\begin{aligned} Y\ (t) &= \text{dosežena rast} \\ t &= \text{čas, starost} \\ a,\ p,\ n &= \text{parametri funkcije.} \end{aligned}$$

Parameter a predstavlja maksimalno velikost znaka, ki nam podaja rast. Običajno je to celotna lesna proizvodnja ali pa zgornja višina. Ta vrednost je odvisna samo od rastišča, ob pogoju, da podajamo rastne funkcije po posameznih drevesnih vrstah.

Parameter p predstavlja starost, pri kateri kulminira tekoči prirastek. Vrednost tega parametra je odvisna od rastišča in od jakosti gojitvenih ukrepov v času razvoja sestoja (pri isti drevesni vrsti). Vrednost parametra n pa podaja stopnjo konvergence rastne funkcije oziroma stopnjo asimetrije prirastne funkcije. Ta vrednost je odvisna predvsem od rastišča in gojitvenih ukrepanj, seveda zopet znotraj iste drevesne vrste. Vrednosti parametrov a in p določimo pri predloženi funkciji neposredno iz podatkov, vrednost parametra n pa s poskušanjem. Ker lahko zavzame n le vrednosti znotraj majhnega intervala, že z majhnim številom preskušanj dobimo dobro oceno za ta parameter. Kot kriterij uspešnosti prilagoditve nam služi vsota kvadratov odstopanj prilagojenih vrednosti od dejanskih vrednosti.

8. SUMMARY
THE USE OF GROWTH FUNCTIONS IN FORESTRY

We use growth functions for analytical presentations of stand growth. The use of growth functions to present the growth of individual trees is most of the times out of place or unsuitable, because coincidental factors affect their growth too much. The influence of these factors is either exterminated or strongly moderated when a large number of trees or the stand itself are being studied or presented.

In calculating the value of parametres of the growth function of the stand, we have two possibilities: either to calculate these values according to the method of smallest quadrates, or according to the method of selected points. According to the method of smallest quadrates, the function needs to be linearized. Usually, to linearize these functions, such a transformation of variables is needed which at a repeated transformation of new variables into the variable of the starting point, gives us such values of parametres, that the sum of quadrates of deviation of the fitting values from the actual values, is no longer minimal. With the method of selected points, we directly define the value of individual parametres on the basis of data from measuring. This method can be used for those forms of the growth function, where individual parametres represent characteristical points of growth and development of stand as well as characteristical points of the site. When to use either of the two methods depends on which signs of growth we vant to study. If the growth function shows us the growth of wood production of the stand, the method of selected points is more suitable. The method of smallest quadrates is not possible in this case, because the data on characteristical points of growth of individual trees cannot serve to the approximation of the curved line of stand growth. This is a result of the rule, that, e.g. stand culmination of the current growth increment of wood occurs at lower age than the culmination of the same growth increment of individual trees. To calculate the value of parametres of the stand growth curved line, we have to have the data on the motion of the current growth increment of the stand. But if the growth function shows us the growth of, e.g. the top most height of stand, both methods are possible for calculating the value of parametres of this growth function.

As an extremely suitable form of growth function we hereby present the tree-parametre function:

$$Y(t) = f(t, a, p, n)$$

where

$Y(t)$ means the attained growth
t means time, age
a, p, n mean the parametres of the function

The parametre a represents the maximal size of the sign which shows us the growth. Usually this is the entire wood production or the top most height. This value depends only on the site, on the condition, that the growth functions are given according to individual tree species.

The parametre p represents age at which the current increment culminates. The value of this parametre depends on the site and the intensity of silvicultural measures during the development of the stand (for the same tree species). The value of parametre n

represents the degree of convergency of growth function, respectively the degree of skewness of the increment function. This value depends first of all on the site and silvicultural measures, again — of course, within the same tree species. The value of parametres a and p, can be set at the given function directly from the data, while the value of parametre n can be set by experimenting. Because n can only hold the value inside a small interval, we get — already with little experimenting, a good estimation for this parametre. As a criterion of successful adjustment, serves the sum of quadrates of deviation adjusted to the value of actual values.

9. LITERATURA

Assmann, E., Waldertragskunde Bayer. Landw. Verlag, München, 1961.

Kotar, M., Prirastoslovje, Biotehniška fakulteta, VTOZD za gozdarstvo, Ljubljana, 1979.

Prodan, M., Forstliche Biometrie Bayer. Landw. Verlag, München, 1961.

Stamenković, V., Prirast i proizvodnost stabala i šumskih sastojina, Izdavačko-informativni centar studenata, Beograd, 1974.

Takeuchi, K., A mathematical expression for volume growth of a thinned stand. Proceedings, XVII IUFRO World congress p. 124—129, Kyoto, 1981.

Todorović, T., Zakonitost organskog rastenja i njegova analitička predstava, Glasnik Šumarskog fakulteta 21, Beograd, 1961.